RED BUILDING TEAM

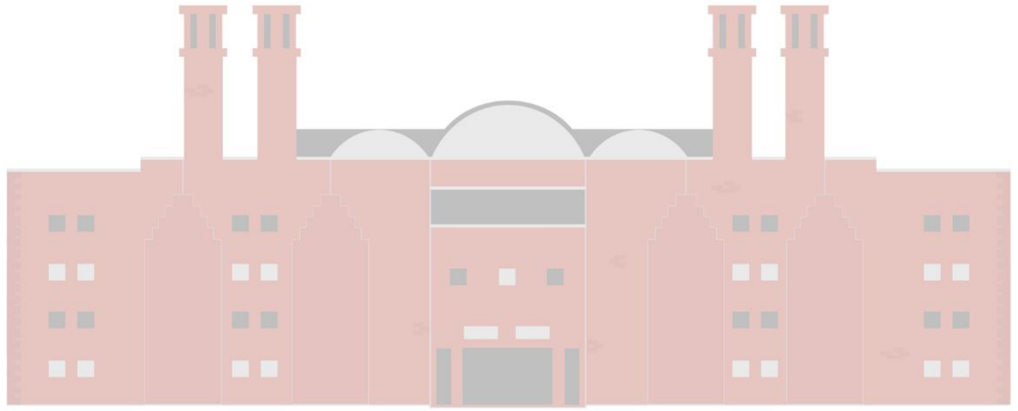
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل العددي

المحاضرة الثالث عشر

5 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/١٢

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

حل جُمل معادلات خطيّة:

عدد المعادلات = عدد المجاهيل

إن صيغة المعادلات التي ستكون لدينا هي مِن الشكل:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} + x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} + x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} + x_n = b_n$$

$$AX = B \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

حل جُمل المعادلات الخطية

الطرائق المُباشرة

- المُحددات
- المقلوب
- الجذر والتعويض
- غاوس
- الحذف بالتساوي

الطرائق الغير مُباشرة

- طريقة التكرار
- طريقة غاوس – سايدل

سنبدأ مع طريقة التحليل إلى عوامل $L.U$

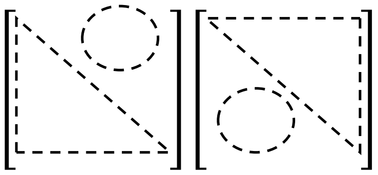
$$AX = B$$
$$A = L.U$$

حيثُ:: $L_{n\times n}$ مصفوفة مُثلثَية دُنيا.

$U_{n\times n}$ مصفوفة مُثلثَية عُليا.

ويكون الشكل الآخر لـ A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$



$$A = L_{n\times n} \times U_{n\times n}$$

ملاحظة : المصفوفة المثلثة الدنيا تكون عناصرها التي فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر وعكسها المصفوفة المثلثة العليا .

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-4&2\\6&-3&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-4&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$A=\quad L_1 \quad \times \quad U_1$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\6&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\quad L_2 \quad \times \quad U_2$$

لكي نستطيع إيجادالمصفوفة X نستخدم القانون $A\,X=B$

نعوض الـ A فنجد : $A\,X=B:(L\,U)\,X=B$

$$L\,(U\,X\,)=B$$

نفرض أن $UX=Y$

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$L.Y=B$$

بحلها نحصل على Y

ثم نعوض في $UX=Y$

وبحلها نحصل على X المطلوب.

مثال:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\overset{L}{\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}}\overset{U}{\begin{pmatrix}b&c\\0&d\end{pmatrix}}$$

وعدد المجاهيل n^2+n إن المعادلات هي n^2

ولكن من المستحيل حلها لأن عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات

ولذلك سنقوم بإيجاد قيم اختيارية لعدد n من المجاهيل لتخفيف عدد المجاهيل لدينا ويسهُل حلّها

وفي مثالنا $n = 2$ إذن سنقوم بإعطاء قيم اختيارية لمجهولين وليكن x و y

ولتكن القيم كالتالي $y = 1\ , x = 1$ فيكون لدينا.

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

مستحيلة :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ ab & ac + d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ a.b = 1 \end{matrix} ??$$

ملاحظة

ليست كل المصفوفات قابلة للتحليل لعوامل

ان الشكل العام لمصفوفة الجداءات هي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{34} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \ell_{n4} & \dots & \ell_{nn} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

عدد المجاهيل $n^2 + n$ عدد المعادلات n^2 وهي نفسها مرتبة المصفوفة A

نعطي ل "n" من المجاهيل قيما افتراضية بذلك تكون عدد المعادلات يساوي الى عدد المجاهيل

في طريقة كراوت نعطي القيم الافتراضية لعناصر القطر الرئيسي للمصفوفة U والتي تساوي الواحد.

$$\mathrm{u}_{11} = \mathrm{u}_{22} = \cdots \dots . = \mathrm{u}_{nn} = 1$$

كراوت
$$\left[\begin{matrix} A_{n.n} = l_{n.n} . u_{n.n} \\ u_n = u_{22} = \cdots .. u_{nn} = 1 \end{matrix} \right.$$

قانون لحساب عناصر المصفوفة "L"

$$\left[\begin{matrix} \mathrm{l_{ij}} = \mathrm{a_{ij}} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}\, u_{sj} \\ i \leq j \end{matrix} \right. \qquad \dots \dots . . (1)$$

قانون لحساب عناصر المصفوفة "U"

$$\left[\begin{matrix} u_{ij} = (aij - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is}\, u_{sj})/l_{ii} \\ i > j \end{matrix} \right. \qquad \dots \dots (2)$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

ان الحالة الخاصة للمعادلة (١)

$j = 1$

$$\begin{cases} l_{i1} = a_{i1} \\ i = 1,2,3, \ldots \ldots .., n \end{cases}$$

اما الحالة الثانية (2) :

$i = 1$

$$\begin{cases} u_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_n} \\ j = 1,2,3, \ldots \ldots .., n \end{cases}$$

عناصر العامود الأول L_i ذاتها عناصر العامود الأول A

مثال : اوجد الحل بطريقة كراوت :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

١. نحلل المصفوفة "A" الى جداء عوامل L.U

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

ان القيم (المجاهيل) المحاطة ب الإطارات نقوم بإيجادها حسب القوانين التي تم استنتاجها

٢. نوجد عناصر العمود الاول من المصفوفة L وذلك حسب القانون التالي :

$$\begin{cases} l_{i1} = a_{i1} \\ n = 1,2,3, \ldots \end{cases} \Rightarrow l_{11} = a_{11} = 3$$

$$l_{21} = a_{21} = 1$$

$$l_{31} = 2$$

٣. نفرض ان $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ كما قلنا سابقا .

٤. نوجد عناصر السطر الأول من U وفق القانون التالي : $u_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{ii}}$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = -\frac{1}{3} \quad , u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{2}{3}$$

٥. نوجد عناصر العمود الثاني للمصفوفة L وذلك وفق القانون التالي : $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}\, u_{sj}$

$$l_{22} = a_{22} - \sum_{s=1}^{1} l_{2s}\, U_{s2} = a_{22} - l_{21}.u_{12} = 2 - (1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} \, , l_{32} = -\frac{4}{3}$$

٦. نوجد عناصر السطر الثاني للمصفوفة U بالقانون : $u_{ij} = (aij - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is}\, u_{sj})/l_{ii} \Rightarrow u_{23} = 1$

٧. نوجد عناصر العمود الثالث للمصفوفة L وفق القانون ذاته فنجد: $l_{33} = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \quad = \quad L \quad . \quad U$$

$$AX = B \Rightarrow \left. \begin{matrix} L.UX = B \\ UX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \right| \Rightarrow L.Y = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المعادلات نجد ان :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{2}{7} \\ y_3 = -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

وبعدما اوجدنا "Y" سنقوم بحساب "U" وذلك من القانون الذي فرضناه : $UX = Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow X_{\text{شعاع}} = \begin{bmatrix} x_1 = \frac{8}{7} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

لا تخف من المسافة بين الحقيقة والحلم. . . . .

فما دمت استطعت ان تحلم بشيء ; فبإمكانك تحقيقه . . . . ^_^_^

بيلفا دافيز